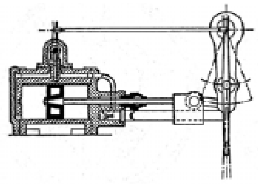
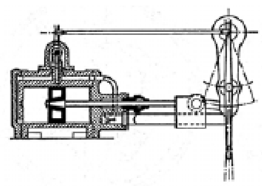
Chapitre 2



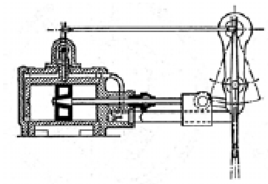
Fonction de transfert des systèmes asservis

0. Introduction



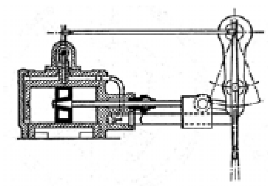
- **Objectifs**
  - Au sens de l'automaticien, **exploiter un système, c'est être capable de dimensionner la commande (son entrée donc) pour obtenir une sortie désirée.**
  - **Exemple :** je veux que la température de la pièce atteigne une consigne donnée de manière précise et en un temps minimal fixé.

0. Introduction



- **<u>Objectifs</u>**
  - Pour ce faire il va être nécessaire de
  - (i) caractériser la relation entrée/sortie du système
  - (ii) la rendre utilisable dans le cadre de l'élaboration d'une commande
  - (iii) être capable d'étudier des systèmes complexes.
  - Ce sont ces 3 points que nous allons maintenant abordés.

Plan



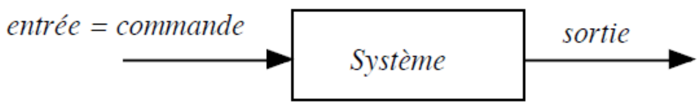
- 1. Relation entrée/sortie des systèmes linéaires
- 2. La transformée de Laplace
- 3. Fonction de transfert d'un système linéaire
- 4. Simplification des schémas fonctionnels

1. Relation entrée/sortie des SL

- **Système linéaire**
  - Les systèmes étudiés dans le cadre de ce cours sont uniquement des systèmes **linéaires**.
  - Un système est **linéaire** s'il possède une des 2 propriétés suivantes :
    - si $s_1(t)$ est la sortie obtenue en appliquant $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la sortie obtenue en appliquant l'entrée $e_2(t)$, alors pour tout réel α et pour tout réel β, en appliquant l'entrée $\boldsymbol{e(t)= \alpha.e_1(t)+ \beta.e_2(t)}$, le système génère la sortie $\boldsymbol{s(t)= \alpha.s_1(t)+ \beta.s_2(t)}$.
    - Un système est dit linéaire **si l'équation liant la sortie à l'entrée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.**

1. Relation entrée/sortie des SL

- **Equation différentielle générale d'un SL**
  - Considérons un SL quelconque à une entrée et une sortie décrit par le schéma fonctionnel habituel :



  - La forme générale de l'équation différentielle reliant l'entrée à la sortie de ce SL est donnée par :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

1. Relation entrée/sortie des SL

- **Equation différentielle générale d'un SL**

  - Quelques remarques :

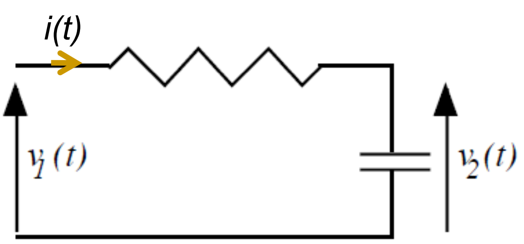
$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

  - Les coefficients a_i *et* b_i , i ϵ [0,m/n] sont des réels quelconques.
  - En pratique, on ne rencontrera que des systèmes tels que **m ≤ n**, on parlera de **systèmes causaux**.

1. Relation entrée/sortie des SL

- **Exemples simples :**

  - 1. Etude d'un circuit RC



Equations électriques :

$$v_1 = R.i + v_2$$

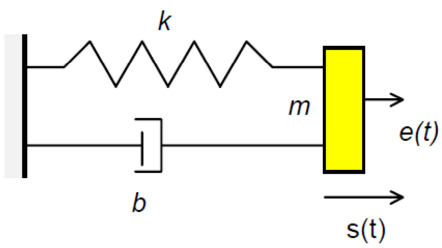
$$C.\frac{dv_2}{dt} = i$$

  - Relation entrée/sortie

$$v_1 = R.C.\frac{dv_2}{dt} + v_2$$

1. Relation entrée/sortie des SL

- **Exemples simples :**
  - 2. Etude d'une suspension mécanique



La masse m est reliée au bâti par un ressort de raideur k et un amortisseur visqueux (frottements) de coefficient b

  - Principe fondamental de la dynamique (projection horizontale)

$$m\frac{d^2s(t)}{dt^2}+b\frac{ds(t)}{dt}+ks(t)=e(t)$$

1. Relation entrée/sortie des SL

- **Résolution des équations différentielles**
  - Résoudre ces équations différentielles permet donc de voir comment se comporte la sortie du système pour une entrée donnée (un dirac, un échelon, une rampe, une sinusoïde…).
  - Théoriquement parlant, la solution générale d'une telle équation différentielle est la solution générale de l'équation sans second membre s_0 plus une solution particulière s_1 de l'équation complète.
  - Néanmoins, c'est la démarche inverse que cherche à réaliser le concepteur de systèmes : aussi, **il veut connaître l'entrée à appliquer pour obtenir une sortie particulière.**

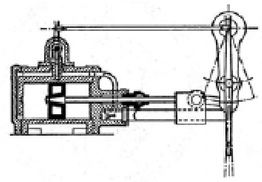
1. Relation entrée/sortie des SL

- **<u>Résolution des équations différentielles</u>**
  - L'inversion de ces équations est alors plus délicate…
  - La méthode de la transformation de Laplace va permettre de transformer les équations différentielles en équations algébriques qu'il sera plus aisé d'inverser.
  - Sera alors introduite la notion de **fonction de transfert d'un système**.

Plan

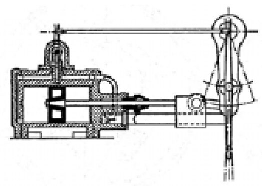
- 1. Relation entrée/sortie des systèmes linéaires
- 2. La transformée de Laplace
- 3. Fonction de transfert d'un système linéaire
- 4. Simplification des schémas fonctionnels

2. Transformées de Laplace



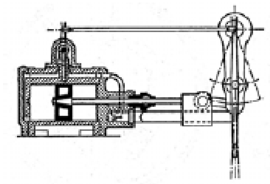
- **<u>Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)</u>**
  - Savant universel : il fut astronome, physicien, mathématicien et fin politicien sous tous les régimes de l’époque (il sera sénateur).
  - Professeur de mathématiques à l’Ecole militaire de Paris à 19 ans.
  - Membre de l’Académie des sciences à 24 ans.
  - Fondateur de l’Ecole Polytechnique et de l’Ecole Normale
  - Père de nombreux théorèmes en mathématiques

2. Transformées de Laplace



- **<u>Principe de la Transformée :</u>**
  - La transformation de Laplace intervient dans la résolution d'équations et de systèmes différentiels et tout particulièrement aujourd'hui en électricité, électronique, théorie de la chaleur, théorie du signal
  - L’idée est de simplifier la résolution classique des équations différentielles en se plaçant dans un autre espace possédant des propriétés intéressantes.

2. Transformées de Laplace

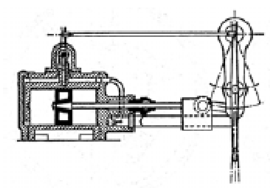


Définition de la transformée

- Soit *f* une fonction causale de la variable temporelle *t*, à valeur donc dans R^+
- La Transformée de Laplace de *f* est alors la fonction *F* de la variable complexe *p* définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-pt}dt$$

2. Transformées de Laplace



Quelques remarques

- *p* est une variable complexe $p=\sigma+j\omega$
- Si $\boldsymbol{\sigma=0}$, on retombe sur le cas particulier de la Transformée de Fourrier
- La Transformée de Laplace d'une fonction n'existe pas toujours : il faut que l'intégrale soit non divergente pour exister (voir cours de math).
- L'opération de Transformation est notée le plus souvent ***L(f)=F(p)***, on rencontrera également TL(f)=F(p).

2. Transformées de Laplace

Quelques remarques

- La résolution d'une équation différentielle *F(y,y',y",...)* = 0 consistera alors à savoir ***inverser*** la transformée de Laplace de y (**retrouver f connaissant L_f**)…
- …ce qui s'avère souvent plus simple que la résolution de l'équation différentielle initiale (usage de tables) !!!
- On parle de ***calcul symbolique*** car des objets mathématiques de nature différente sont ici substitués : **calcul fonctionnel <> calcul algébrique**

2. Transformées de Laplace

Propriétés de la Transformée

- **Linéarité :**

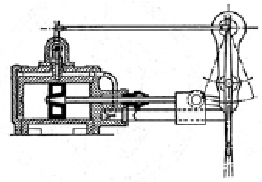
$$TL[a.f(t) + b.g(t)] = a.F(p) + b.G(p)$$

- **Dérivation :**

1er ordre : $$TL\left[\frac{df}{dt}\right] = p.F(p) - \lim_{t \to 0+} f(t)$$

2ème ordre : $$TL\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = p^2.F(p) - p.\lim_{t \to 0+} f(t) - \lim_{t \to 0+} \frac{df(t)}{dt}$$

2. Transformées de Laplace



Propriétés de la Transformée

- **Dérivation :**

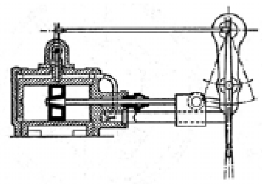
  Souvent, *f(t)* et les dérivées successives de *f(t)* sont nulles a l'instant initial (*t* tend vers 0^+).

  On dira que **les conditions initiales sont nulles**.

- **Intégration :**

$$TL\left[\int_0^t f(\tau).d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}$$

2. Transformées de Laplace

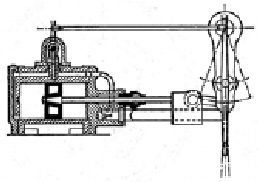


Propriétés de la Transformée

- **Translation de la variable de Laplace :**

$$F(p+a) = TL\left[e^{-at}.f(t)\right]$$

2. Transformées de Laplace



Quelques théorèmes importants

- **Théorème du retard :** $TL[f(t-\tau)] = e^{-\tau.p}.F(p)$

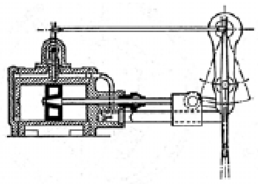
- **Théorème de la valeur initiale :**

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p.F(p)$$

- **Théorème de la valeur finale :**

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p.F(p)$$

2. Transformées de Laplace



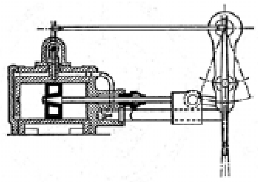
Application à la résolution d'équations différentielles

- Rappelons la forme générale d'une équation différentielle d'ordre ***n***

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

- Rappelons aussi que les a_i et les b_i sont des réels, et que ***s*** est la sortie du système étudié et ***e*** son entrée.

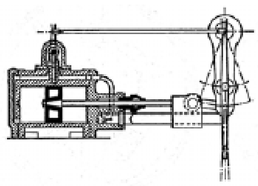
2. Transformées de Laplace



- **Application à la résolution d'équations différentielles**
  - En appliquant la TL à cette équation, nous pouvons écrire :

$$b_0S(p) + b_1\left(p.S(p) - s(0^+)\right) + b_2\left(p^2.S(p) - p.s(0^+) - \frac{ds(0^+)}{dt}\right) + \cdots$$
$$= a_0E(p) + a_1\left(p.E(p) - e(0^+)\right) + \cdots$$

2. Transformées de Laplace

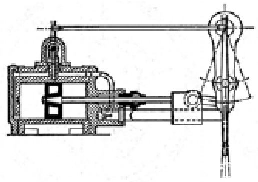


- **Application à la résolution d'équations différentielles**
  - Ce qui peut se mettre sous la forme :

$$(b_0 + b_1.p + \cdots + b_n.p^n).S(p) + I_s = (a_0 + a_1.p + \cdots + a_mp^m).E(p) + I_e$$

  - I_s et I_e sont des termes dépendants des conditions initiales de *s* et de *e.*
  - Comme dit précédemment, **il est courant en automatique de considérer les CI nulles.**

2. Transformées de Laplace



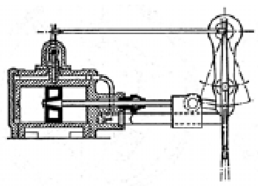
Application à la résolution d'équations différentielles

- On obtient alors la relation générale suivante entrée/sortie :

$$S(p) = \frac{a_0 + a_1.p + \cdots + a_m.p^m}{b_0 + b_1.p + \cdots + b_n.p^n}.E(p)$$

- Pour déterminer *s,* connaissant *e,* il suffit alors d'inverser l'expression à droite de l'égalité.

2. Transformées de Laplace



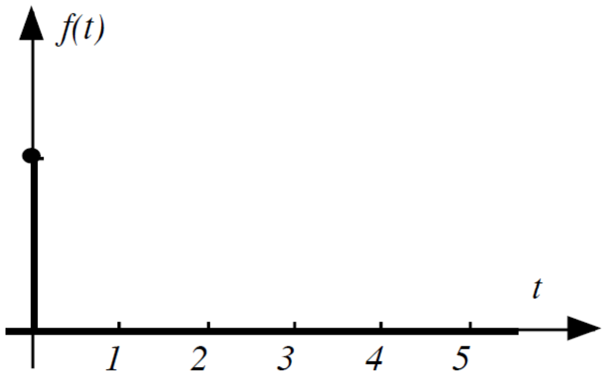
Quelques transformées classiques

- Comme nous l'avons dit précédemment, les signaux de commande que nous rencontrerons sont limités en nombre.

- Il convient donc de connaître la TL des plus utilisés.

2. Transformées de Laplace

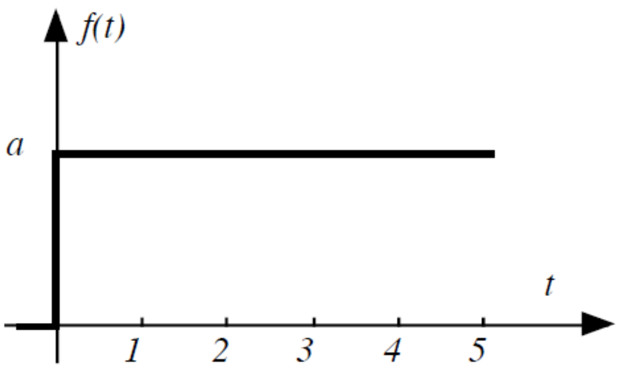
- **<u>Quelques transformées classiques</u>**
  - **L'impulsion de dirac :** $f(t): t \to \delta(t)$



$$\boxed{TL[\delta(t)] = 1}$$

2. Transformées de Laplace

- **<u>Quelques transformées classiques</u>**
  - **L'échelon d'amplitude *a*:** $f(t): t \to a$

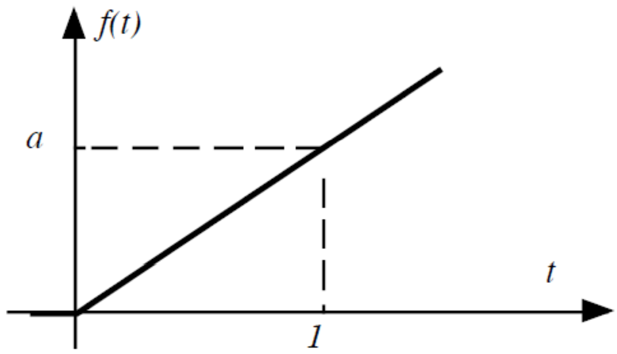


$$\boxed{F(p) = \frac{a}{p}}$$

Dans le cas où a=1, on parle d'échelon unitaire, et **la fonction *f(t)* est classiquement notée *u(t)***

2. Transformées de Laplace

- **Quelques transformées classiques**
  - **La rampe de pente *a* :** $f(t) : t \rightarrow a.t.u(t)$



$$\boxed{F(p) = \frac{a}{p^2}}$$

2. Transformées de Laplace

- **Inversion de Transformées de Laplace**
  - Connaissant maintenant *E(p)*, ***il ne reste plus qu'à*** inverser l'expression

$$S(p) = \frac{a_0 + a_1.p + \cdots + a_m.p^m}{b_0 + b_1.p + \cdots + b_n.p^n}.E(p)$$

pour déterminer le signal *s(t)* correspondant à l'entrée *e(t).*

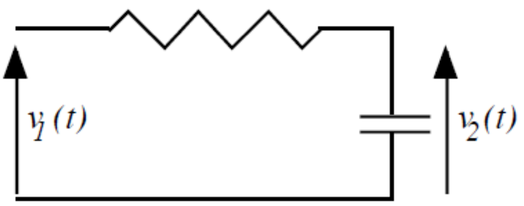
  - Pour ce faire, il faut avoir recours à **la décomposition en élément simple (voir cours de math)** et **aux tables de transformées**.

2. Transformées de Laplace

- **Inversion de Transformées de Laplace**
  - La décomposition en élément simple permet d'écrire l'expression précédente sous forme **d'une somme de fractions rationnelles simples fondamentales…**
  - …les tables nous donnent ensuite la TL inverse de chaque terme de la somme (la TL étant linéaire la TL inverse aussi).

2. Transformées de Laplace

- **Exemple d'application**
  - Reprenons le problème de la charge d'un condensateur :



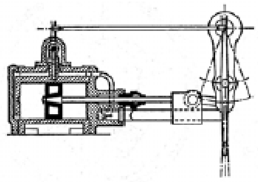
$$v_1 = R.i + v_2$$

$$C.\frac{dv_2}{dt} = i$$

  - **Equation différentielle entrée/sortie**

$$v_1 = R.C.\frac{dv_2}{dt} + v_2$$

2. Transformées de Laplace



- **Exemple d'application**

$$v_1 = R.C.\frac{dv_2}{dt} + v_2$$

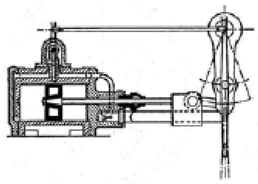
  - En appliquant la TL à l'équation différentielle (CI nulles), nous avons donc que :

$$V_1(p) = RC.p.V_2(p) + V_2(p)$$

  - Soit

$$V_2(p) = \frac{1}{1+RC.p}V_1(p)$$

2. Transformées de Laplace



- **Exemple d'application**

$$V_2(p) = \frac{1}{1+RC.p}V_1(p)$$

  - Si maintenant v_1 est un échelon de tension unitaire :

$$V_2(p) = \frac{1}{(1+RC.p)p}$$

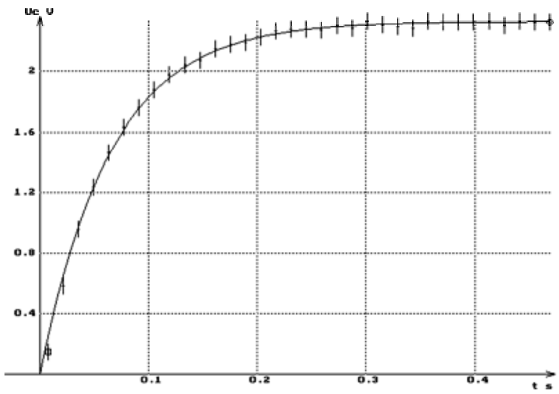
  - La décomposition en élément simple de V_2 nous donne que :

$$V_2(p) = \frac{1}{(1+RC.p)p} = \frac{1}{p} - \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC}+p} = \frac{1}{p} - \frac{a}{p+a}$$

2. Transformées de Laplace

$$V_2(p) = \frac{1}{1+RC.p}V_1(p)$$

- **Exemple d'application**
  - La consultation des tables nous donne alors :



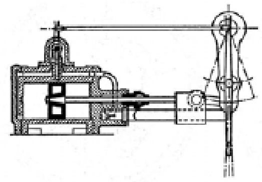
$$v_2(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}).u(t)$$

On retrouve le résultat classique de la charge d'un condensateur.

Plan

- 1. Relation entrée/sortie des systèmes linéaires
- 2. La transformée de Laplace
- 3. Fonction de transfert d'un système linéaire
- 4. Simplification des schémas fonctionnels

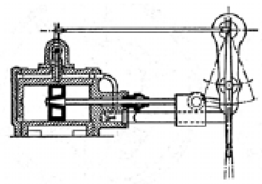
3. Fonction de transfert d'un SL



- **Définition :**
  - Dans la section précédente, nous avons vu que pour tout système linéaire continu, nous pouvions donc au moyen de la TL définir une relation entrée/sortie du type :

$$S(p) = \frac{a_0 + a_1.p + \cdots + a_m.p^m}{b_0 + b_1.p + \cdots + b_n.p^n}.E(p)$$

3. Fonction de transfert d'un SL



- **Définition :**
  - **La fonction de transfert** se définit alors comme **le rapport de la TL de la sortie sur celle de l'entrée du système étudié :**

$$\boxed{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1.p + \cdots + a_m.p^m}{b_0 + b_1.p + \cdots + b_n.p^n}}$$

  - Elle permettra comme nous le verrons de caractériser entièrement le système étudié en termes de performances.

3. Fonction de transfert d'un SL

Définition :

- **L'ordre** du système qu'elle caractérise est donné par **la puissance de plus haut degré du dénominateur** (c'est aussi l'ordre de l'équation différentielle de départ).

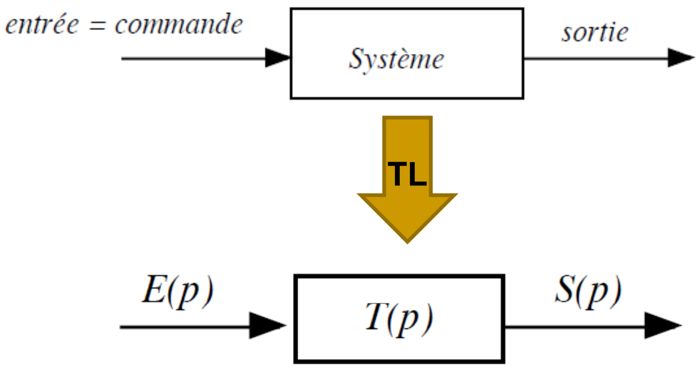
$$\boxed{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1.p + \cdots + a_m.p^m}{b_0 + b_1.p + \cdots + b_n.p^n}}$$

Ordre **n**

3. Fonction de transfert d'un SL

Utilisation :

- **Simplification des schéma-bloc d'un système :**



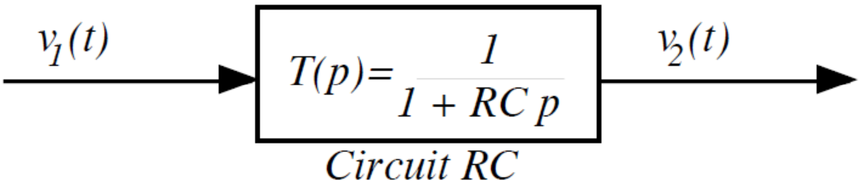
Domaine temporelle

Domaine de Laplace

3. Fonction de transfert d'un SL

- **Exemple :**
  - **SI nous revenons à l'exemple de la charge d'un condensateur**

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + R.C.p}$$

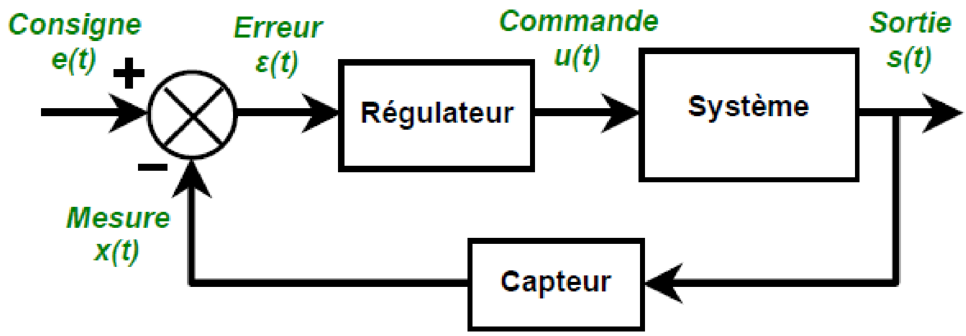


Plan

- 1. Relation entrée/sortie des systèmes linéaires
- 2. La transformée de Laplace
- 3. Fonction de transfert d'un système linéaire
- 4. Simplification des schémas fonctionnels

4. Simplification des SF

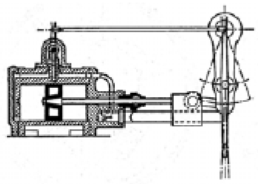
- **<u>Rappel :</u>**
  - Le schéma bloc fonctionnel temporel d'un système asservi est de la forme générale suivante :



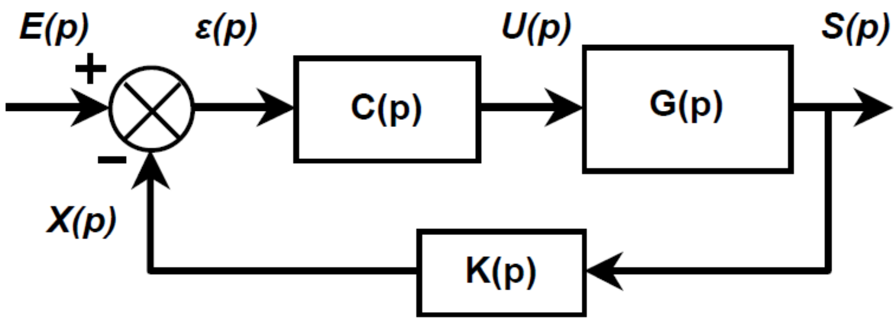
4. Simplification des SF

- **<u>Objectif</u>**
  - On peut donc voir un système asservi **comme un système complexe**…
  - …**constitué de sous-systèmes plus simples**…
  - …**chacun caractérisé par une fonction de transfert donnée**.

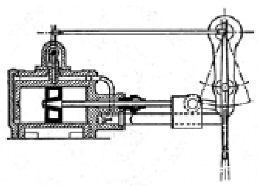
4. Simplification des SF



- **Objectif**
  - On peut donc tracer un nouveau schéma bloc associé aux SA dans le domaine de Laplace :



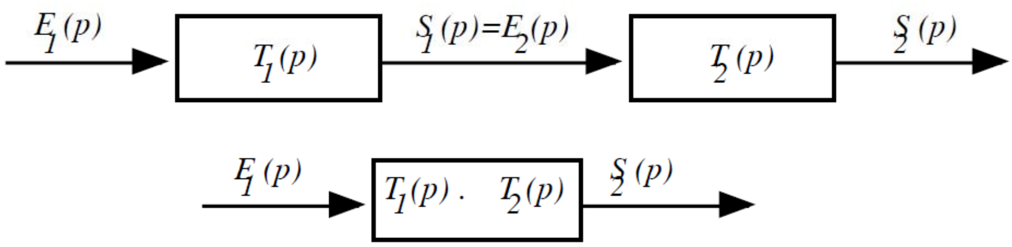
4. Simplification des SF



- **Objectif**
  - Et finalement définir une fonction de transfert global du système asservi définie par le rapport ***S(p) sur E(p)***.
  - Il faut pour cela être capable de simplifier le schéma bloc précédent.
  - Un certain nombre de règles de simplification vont donc nous être utiles…

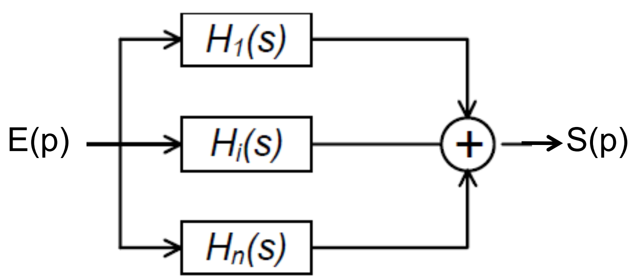
4. Simplification des SF

- **Règles de simplification**
  - **1. La mise en cascade** de deux systèmes dont les fonctions de transfert sont T1(p) et T2(p) est équivalent a un seul système dont la fonction de transfert serait T1(p)*T2(p)



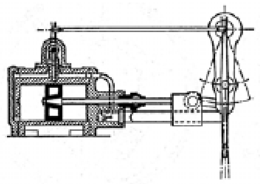
4. Simplification des SF

- **Règles de simplification**
  - **2. Mise en parallèle de fonctions de transfert**



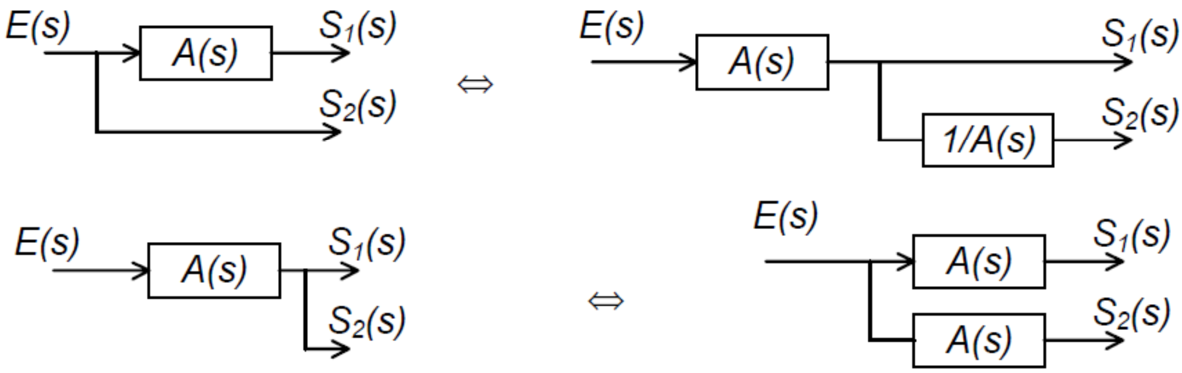
$$\boxed{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = H_1(p) + H_2(p) + \ldots + H_n(p)}$$

4. Simplification des SF

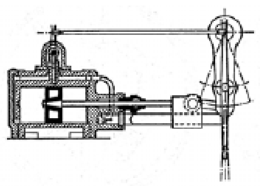


Règles de simplification

- 3. Déplacement d'un point de prélèvement

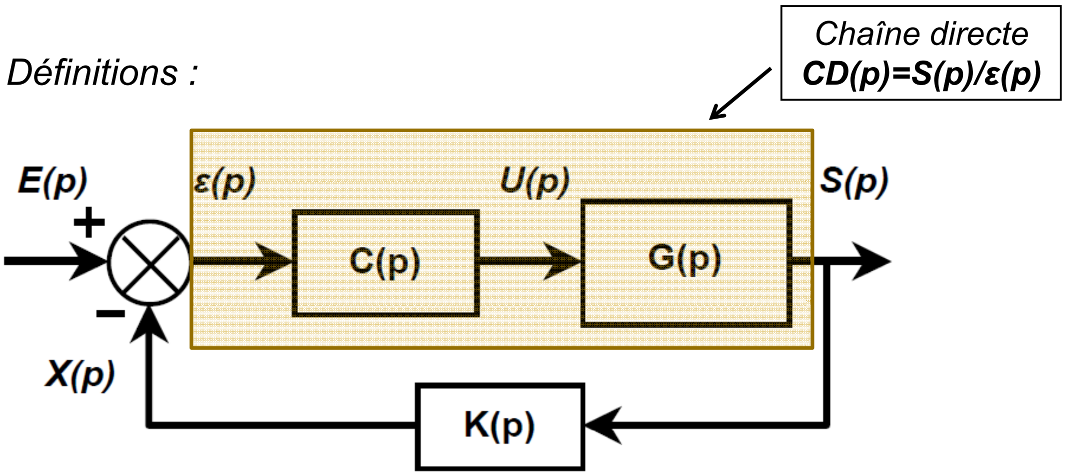


4. Simplification des SF

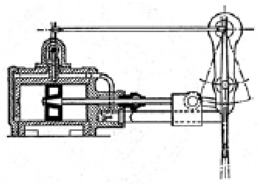


Application aux systèmes asservis

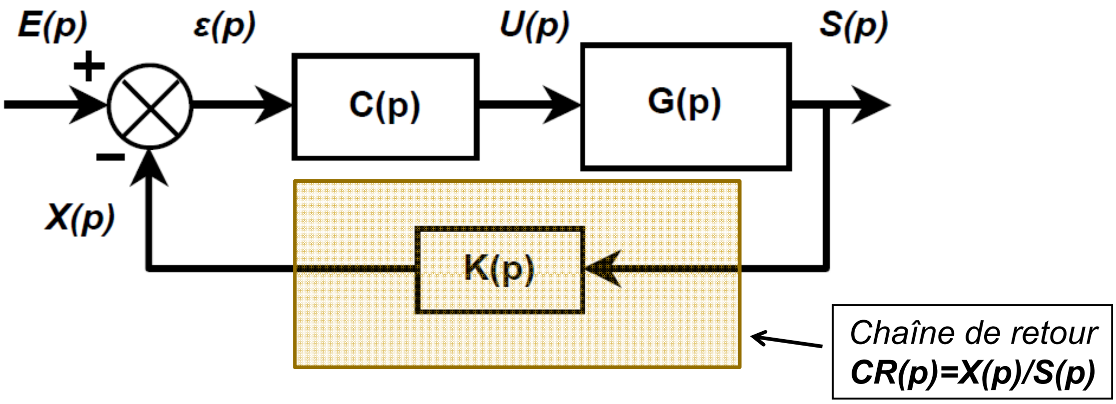
- *Définitions :*



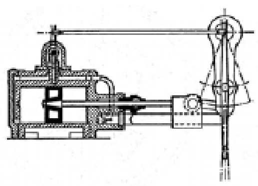
4. Simplification des SF



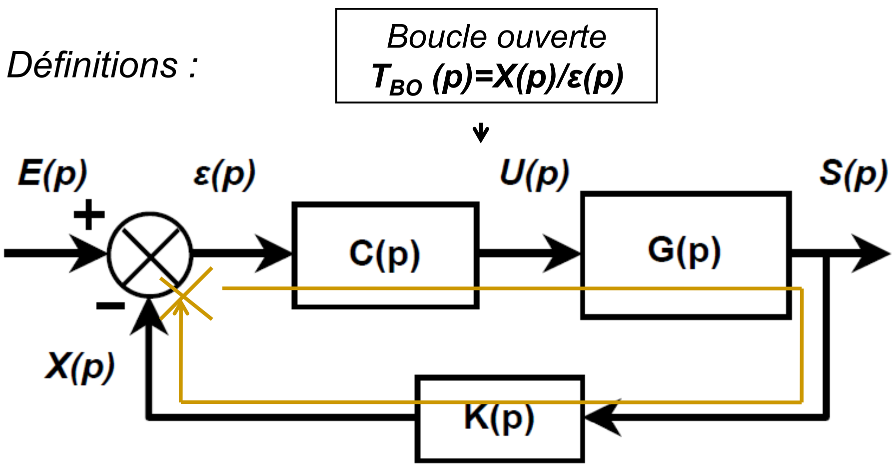
- **Application aux systèmes asservis**
  - *Définitions :*



4. Simplification des SF



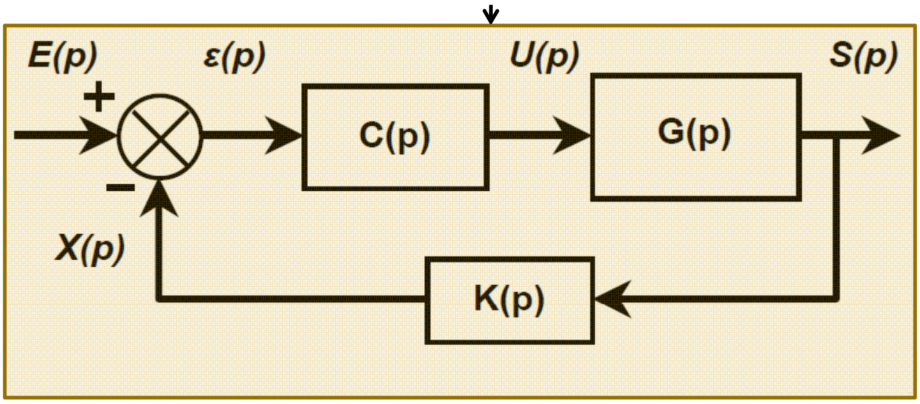
- **Application aux systèmes asservis**
  - *Définitions :*



4. Simplification des SF

- **<u>Application aux systèmes asservis</u>**
  - *Définitions :*

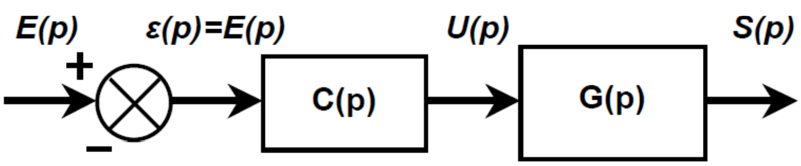
Boucle fermée
T_{BF} (p)=S(p)/E(p)



4. Simplification des SF

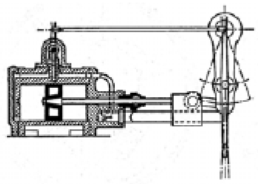
- **<u>Application aux systèmes asservis</u>**
  - *Fonctions de transfert associées :*

    Chaîne directe :



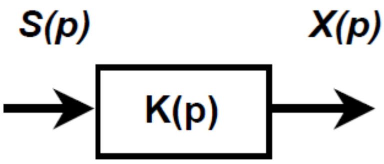
$$\boxed{CD(p)=\frac{S(p)}{\varepsilon(p)}=C(p).G(p)}$$

4. Simplification des SF



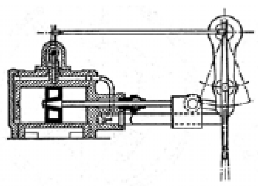
- **<u>Application aux systèmes asservis</u>**
  - *Fonctions de transfert associées :*

    Chaîne de retour :



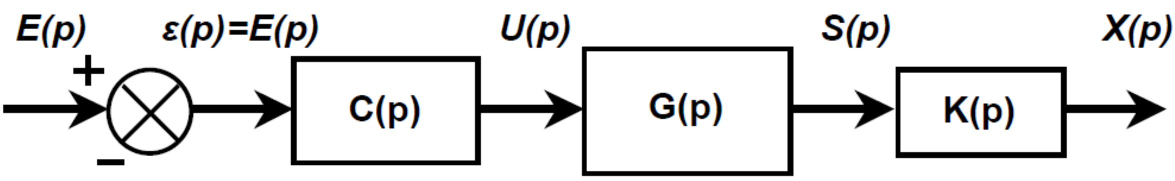
$$\boxed{CR(p) = \frac{X(p)}{S(p)} = K(p)}$$

4. Simplification des SF



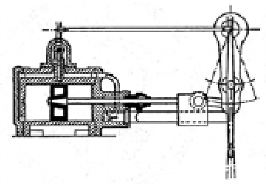
- **<u>Application aux systèmes asservis</u>**
  - *Fonctions de transfert associées :*

    Boucle ouverte:



$$\boxed{T_{BO}(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)} = C(p).G(p).K(p)}$$

4. Simplification des SF

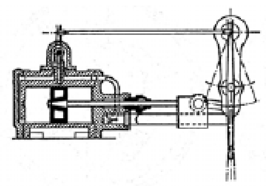


- **<u>Application aux systèmes asservis</u>**

  - ***Nous montrerons en TD, qu'il en découle que, pour la boucle fermée (i.e. le système asservi tel que nous l'avons défini) :***

$$\boxed{T_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{CD(p)}{1+T_{BO}(p)} = \frac{C(p).G(p)}{1+C(p).G(p).K(p)}}$$

4. Simplification des SF



- **<u>Application aux systèmes asservis</u>**

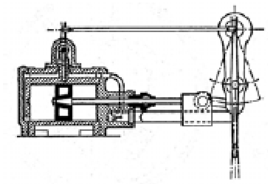
  - ***Le schéma-bloc d'un système asservi peut donc se simplifier :***

E(p) →

$$\boxed{T_{BF}(p) = \frac{C(p).G(p)}{1+C(p).G(p).K(p)}}$$

→ *S(p)*

4. Simplification des SF



- **Remarques**
  - Les règles de simplification s’appliquent à tout système complexe.
  - La fonction de transfert d’un système asservi va permettre de le caractériser entièrement comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.
  - Il arrive souvent que ***K(p)=1***, on parle de retour unitaire.